EQUILIBRIO, DISEQUILIBRIO E TEMPO IN WALRAS

FRANCO DONZELLI

Working Paper n. 2006-18

LUGLIO 2006

Università degli Studi di Milano

Dipartimento di

Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Via Conservatorio 7 -- 20122 Milano

tel. ++39 02 503 21501 (21522) fax ++39 02 503 21450 (21505)

http://www.economia.unimi.it E Mail: dipeco@unimi.it

Lavoro presentato alla riunione scientifica dell'Istituto Lombardo, Milano, 23 marzo 2006

Franco Donzelli
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche
Università degli Studi di Milano

Equilibrio, disequilibrio e tempo in Walras

1. Introduzione

Contrariamente a quanto spesso si ritiene, il pensiero scientifico di Walras non resta inalterato nel corso della vita di questo autore: in particolare, la teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale subisce profonde modificazioni nei ventisei anni che intercorrono fra la data di pubblicazione del primo contributo teorico rilevante di Walras (1874) e quella in cui vede la luce la quarta edizione della sua opera fondamentale, gli *Eléments d'économie politique pure* (1900), e in cui si chiude definitivamente il lungo periodo creativo di questo economista.

In questo lavoro intendiamo ricostruire alcuni aspetti delle intricate vicende che accompagnano l'evoluzione del pensiero scientifico di Walras lungo l'ultimo quarto dell'Ottocento, concentrando principalmente la nostra attenzione sui legami intercorrenti fra equilibrio, disequilibrio e tempo nei numerosi modelli che Walras sviluppa e continuamente rielabora in quegli anni.

Il lavoro è strutturato nella maniera seguente. Nel par. 2 passiamo in rapida rassegna le tappe che segnano l'evoluzione della teoria walrasiana, ricordando le opere più significative nelle quali tale teoria viene esposta e i principali modelli nei quali essa trova man mano espressione. Nel par. 3 esaminiamo due concetti di "soluzione" elaborati da Walras con riferimento ai suoi modelli di equilibrio, le cosiddette soluzioni "teorica" ed "empirica", discutendo in particolare le relazioni intercorrenti fra tali concetti di "soluzione" e la concezione walrasiana dell'equilibrio economico e del processo di aggiustamento all'equilibrio. Il par. 4 si concentra sul primo e più semplice dei modelli di equilibrio di Walras, il modello di puro scambio, analizzandone la struttura e lo statuto epistemologico nell'anno in cui viene per la prima volta formulato e reso noto alla comunità scientifica (1874). Il par. 5 discute le modificazioni apportate da Walras all'interpretazione di tale modello negli anni Ottanta dell'Ottocento, modificazioni poi confermate negli anni successivi fino alla fine del secolo. Nel par. 6 analizziamo i modelli walrasiani di equilibrio con produzione, dalle prime formulazioni del biennio 1876-77 fino alla pubblicazione della terza edizione degli *Eléments* (1896). Nel par. 7 ci soffermiamo sulla svolta analitica e interpretativa attuata da Walras nella quarta edizione degli *Eléments* (1900), mediante l'introduzione di una fondamentale ipotesi, la cosiddetta "*hypothèse des bons*", concernente la natura del processo di aggiustamento all'equilibrio e la struttura temporale dell'analisi. Il par. 8, infine, contiene alcune considerazioni conclusive.

2. L'evoluzione della teoria walrasiana dell'equilibrio generale dal 1874 al 1900

L'opera principale di Walras, quella in cui trova più articolata e completa espressione la teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale, è senz'altro rappresentata dagli *Eléments d'économie politique pure*. Di quest'opera furono pubblicate quattro edizioni durante la vita di Walras: la prima edizione, suddivisa in due volumi, apparve nel 1874 e nel 1877; le tre edizioni successive, tutte pubblicate come volumi unici, apparvero rispettivamente nel 1889 (II edizione), nel 1896 (III edizione) e nel 1900 (IV edizione, l'ultima durante la vita di Walras)[1].

[1] Da tempo è disponibile un'edizione critica degli *Eléments*, che consente agevoli confronti fra i testi delle varie edizioni; pertanto nel seguito faremo sempre riferimento a questa edizione, contenuta nel vol. VIII delle *Œuvres économiques complètes d'Auguste et de Léon Walras*, pubblicato nel 1988. Quando effettueremo citazioni dall'edizione

La prima formulazione a stampa della teoria walrasiana, tuttavia, non è contenuta negli *Eléments*, ma nel primo di quattro *mémoires*, separatamente scritti e pubblicati nei bollettini di società scientifiche presso le quali Walras aveva in precedenza presentato i testi corrispondenti. La stesura di questi quattro lavori è strettamente intrecciata a quella della prima edizione degli *Eléments*. I primi due *mémoires* coprono in parte gli argomenti trattati nel primo volume della prima edizione degli *Eléments*; di questi, tuttavia, solo il primo ("Principe d'une teorie mathématique de l'échange", del gennaio 1874) fu in effetti pubblicato prima dell'uscita, nel luglio 1874, del primo volume della prima edizione degli *Eléments*; il secondo ("Equations de l'échange") apparve solo nell'ottobre del 1876. Gli altri due *mémoires*, "Equations de la production" ed "Equations de la capitalisation", che coprono in parte gli argomenti trattati nel secondo volume della prima edizione degli *Eléments*, apparvero rispettivamente nell'ottobre 1876 e nel marzo 1877. Nel 1877 i quattro *mémoires* furono raccolti da Walras in una *brochure*, alla quale fu dato il titolo di *Théorie mathématique de la richesse sociale*; questa *brochure* fu poi ripubblicata nel 1883, sotto lo stesso titolo, in una versione rivista e accresciuta, contenente i quattro *mémoires* originari e altri tre scritti nel frattempo[2].

Bisogna infine ricordare due ulteriori lavori, separatamente scritti e rispettivamente pubblicati nel 1891 e nel 1892, che presentano qualche rilievo ai fini della ricostruzione del pensiero di Walras in tema di equilibrio e disequilibrio. Questi due lavori furono successivamente rivisti da Walras e fusi in un unico testo, che apparve come "Appendice I" nella terza (1896) e quarta (1900) edizione degli *Eléments*, sotto il titolo di "Théorie géométrique de la détermination des prix"[3].

In tutte le opere sopra citate, e specialmente negli *Eléments*, Walras sviluppa il proprio sistema teorico per stadi successivi, seguendo un particolare metodo costruttivo ed espositivo che in parte sopravvivrà nella successiva evoluzione, anche recente, della teoria dell'equilibrio economico generale. Il metodo di Walras consiste nell'elaborare una successione di modelli nidificati, disposti in ordine di crescente estensione: i modelli sono nidificati nel senso che la portata descrittiva di ciascun modello è più ampia di quella che caratterizza il modello che lo precede nella successione (sempre che tale predecessore esista); da un punto di vista fenomenico, pertanto, ciascun modello include il precedente ed è incluso nel successivo (sempre che il predecessore e/o il successore esistano).

Tre modelli sono compiutamente sviluppati in tutte le edizioni degli *Eléments*, nei quattro *mémoires* e nelle altre opere sopra citate. I tre modelli in questione sono: un modello di puro scambio, che affronta dapprima il problema dello scambio di due merci (beni di consumo) l'una contro l'altra e quindi il problema dello scambio multilaterale di un numero arbitrario finito di merci (beni di consumo); un modello di scambio e produzione che, oltre a includere il modello precedente (da un punto di vista fenomenico e, in parte, analitico), affronta anche il problema della trasformazione di servizi produttivi in beni di consumo; e infine un modello di formazione del capitale che, oltre a includere il modello precedente (sempre da un punto di vista fenomenico e, in parte, analitico), affronta anche il problema della trasformazione di servizi produttivi in beni capitali durevoli di nuova produzione. La struttura di questi tre modelli, al pari delle relazioni reciproche che fra essi intercorrono, rimangono fondamentalmente inalterate in tutte le edizioni degli *Eléments*,

---

critica degli *Eléments*, adotteremo la seguente convenzione, che ci permetterà di distinguere fra le varie edizioni originali: Walras (1988, numero o numeri di pagina dell'edizione critica, numero dell'edizione originale o numeri delle edizioni originali in neretto); se non viene specificato alcun numero di edizione originale, questo significa che il testo è rimasto inalterato in tutte le edizioni. L'edizione inglese a cura di Jaffé (Walras (1954)), pur rappresentando un utile strumento per studiosi e storici, è spesso inattendibile e non sarà perciò usata.

[2] Quest'ultimo lavoro è ora disponibile nel volume XI delle *Œuvres économiques complètes d'Auguste et de Léon Walras*, pubblicato nel 1993. Quando faremo riferimento ai vari *mémoires*, alla *brochure* del 1877 o alla raccolta di saggi del 1883, identificheremo la fonte originale della citazione specificando l'anno di prima pubblicazione del testo corrispondente; i numeri di pagina, tuttavia, rinvieranno sempre all'impaginazione adottata nel vol. XI delle *Œuvres économiques complètes d'Auguste et de Léon Walras*, dove sono reperibili tutti i testi sopra menzionati.

[3] Le citazioni da questo testo faranno riferimento all'edizione critica degli *Eléments* (Walras, 1988), adottando le convenzioni specificate sopra alla nota 1.

come Walras stesso sottolinea nella prefazione alla quarta edizione (1988, p. 5, **4**). Nella quarta edizione, tuttavia, Walras formula esplicitamente anche un quarto modello che, oltre a occuparsi dei problemi già trattati nel terzo, affronta anche la questione del capitale circolante e della moneta. Le problematiche connesse alla moneta erano già state estesamente discusse in tutte le edizioni precedenti degli *Eléments*, ma solo nella quarta edizione, come Walras stesso non manca di sottolineare nella corrispondente prefazione (Walras, 1988, pp. 8-9, **4**), egli compie il tentativo di integrare le tematiche monetarie nell'apparato formale vero e proprio della teoria. Peraltro va rilevato che, fin dalla prima edizione degli *Eléments*, nel disegnare l'architettura analitica generale della propria teoria, Walras aveva riservato un apposito spazio ai temi del capitale circolante e della moneta (Walras, 1988, pp. 276-277); questo spazio, rimasto vuoto per un quarto di secolo, sarebbe stato formalmente occupato solo nel 1900.

3. Soluzione "teorica" e soluzione "empirica" nei modelli di equilibrio di Walras

Secondo Walras l'economista teorico, dopo aver formalizzato uno specifico problema mediante un appropriato modello matematico, deve portare a compimento la propria opera spiegando dapprima in quale modo il modello in questione può essere "risolto" e individuando poi la corrispondente "soluzione". Più specificamente, riferendosi ai modelli formali di cui si compone la sua teoria dell'equilibrio generale, Walras mostra di ritenere che per "risolvere" ciascun modello sia necessario impiegare una speciale procedura "risolutiva" a due stadi, a ciascuno dei quali può essere associata una speciale nozione di "soluzione". Il brano seguente illustra in maniera chiara il punto di vista di Walras al riguardo:

> Or, pour démontrer que des prix de marchandises, qui sont des quantités, [...] résultent effectivement de telles ou telles données ou conditions, il est absolument indispensable à mon sens: 1° de formuler, d'après ces données ou conditions, un système d'équations, en nombre rigoureusement égal à celui des inconnues, dont les quantités en question soient les racines, et 2° d'établir que l'enchaînement des phénomènes de la réalité constitue bien la résolution empirique de ce système d'équations. C'est ce que j'ai fait en ce qui concernait successivement l'échange, la production et la capitalisation.[4]

Come si vede, per "risolvere" un modello "nel senso di Walras" il teorico deve soddisfare due distinti requisiti, ciascuno dei quali richiede che sia compiuto uno specifico insieme di passi. Incominciamo a considerare il primo insieme.

Dato un problema economico, identificato da un certo insieme di "dati" o "condizioni" e da certe "incognite", il teorico deve innanzitutto costruire un modello formale del problema specificando un "sistema di equazioni" che incorpori in maniera appropriata i "dati" e le "condizioni" (parametri, funzioni, relazioni) del problema stesso; inoltre, per Walras, il numero delle equazioni deve essere "rigorosamente uguale a quello delle incognite". Coerentemente con la propria impostazione generale, per ciascuno dei suoi quattro modelli di equilibrio Walras provvede a formulare un sistema di equazioni, controllando in ogni caso che il numero delle incognite coincida con il numero delle equazioni indipendenti. Apparentemente, secondo quanto Walras stesso sembra suggerire in molteplici occasioni (almeno una per ciascun modello), l'uguaglianza del numero delle incognite e delle equazioni indipendenti rappresenta una condizione sufficiente per garantire la risolubilità del sistema di equazioni e quindi la determinatezza dell'equilibrio associato

[4] Walras (1988, p. 651). Alla fine del brano sopra riportato sono menzionati solo i primi tre modelli elaborati da Walras (i modelli di scambio, produzione, e formazione del capitale), mentre è omesso il quarto modello che, come ricordato, estende l'analisi al capitale circolante e alla moneta. Questa omissione è dovuta semplicemente al fatto che il passo citato risale alla prima edizione degli *Eléments* e non subisce alcuna modificazione nelle successive; pertanto esso risulta scritto in un momento in cui le problematiche monetarie non erano ancora divenute oggetto di un modello formale, cui si potesse applicare la procedura "risolutiva" a due stadi adottata da Walras in tutti i suoi modelli.

a un certo modello[5]. La soluzione del sistema di equazioni algebriche ordinarie che descrive un particolare problema economico viene denominata da Walras "soluzione teorica e matematica" o anche "soluzione scientifica" del problema stesso o, come si potrebbe dire oggi con maggiore precisione, del modello che lo rappresenta (Walras, 1988, pp. 93, 307, 375; 1988, p. 189, **2-4**; 1988, p. 461, **4**).

Non è chiaro se Walras ritenga che la "soluzione teorica e matematica" di un certo sistema di equazioni possa essere effettivamente calcolata dal teorico che ha formulato le equazioni stesse. Al riguardo, nell'arco di pochi mesi, Walras assume due posizioni apparentemente contrastanti. In effetti, nel suo primo scritto teorico di rilievo, il *mémoire* pubblicato nel gennaio 1874, riferendosi in particolare al semplice problema dello scambio di due merci l'una contro l'altra, Walras scrive:

> *A priori*, *ce problème est évidemment soluble, du moins en principe, par le procédé mathématique, comme il est soluble, en fait, sur le marché, par le procédé empirique de la hausse et de la baisse*. Sur notre marché, nous avons supposé les acheteurs et les vendeurs en présence les uns des autres; mais la présence des ces échangeurs n'est pas nécessaire: qu'ils donnent leurs ordres à des agents, le marché ce tiendra entre ces derniers. […] Mais, théoriquement, la présence des agents est-elle plus nécessaire que celle des échangeurs eux-mêmes? Pas le moins du monde. Ces agents sont les exécuteurs purs et simples d'ordres inscrits sur des carnets: qu'au lieu de faire la criée, ils donnent ces carnets à un calculateur, et *ce calculateur déterminera le prix d'équilibre non pas certes aussi rapidement, mais à coup sûr plus rigoureusement que cela ne pourrait se faire par le mécanisme de la hausse et de la baisse*. (Walras, 1874, p. 37; corsivo aggiunto)

Tuttavia, ritornando sul medesimo problema nel primo volume della prima edizione degli *Eléments*, pubblicato a distanza di pochi mesi nel luglio 1874, Walras scrive:

> On voit clairement à présent ce qu'est le mécanisme de la concurrence sur le marché; c'est la solution pratique, et par hausse et baisse des prix, du problème de l'échange dont nous avons fourni la solution théorique et mathématique. On doit comprendre d'ailleurs que notre intention n'est aucunement de substituer une solution à l'autre. La solution pratique est d'une rapidité et d'une sûreté qui ne laissent rien à désirer. On peut voir, sur de grands marchés fonctionnant même sans courtiers ni crieurs, le prix courant d'équilibre se déterminer en quelques minutes, et des quantités considérables de marchandise s'échanger à ce prix en deux ou trois quarts d'heure. *Au contraire, la solution théorique serait, dans presque tous les cas, absolument impraticable*. (Walras, 1988, p. 93; corsivo aggiunto)

L'apparente contrasto fra i due brani circa la "praticabilità" della "soluzione teorica" o la "computabilità" dell'equilibrio nel modello di puro scambio passa tuttavia in secondo piano quando si consideri che, in entrambi i passi citati, Walras insiste con simili accenti sul fatto che la concreta determinazione della "soluzione", ovvero l'effettivo raggiungimento dell'equilibrio nel modello di puro scambio, è in ogni caso il frutto del "procedimento empirico" o del "meccanismo pratico della concorrenza sul mercato", che opera attraverso "l'aumento e la diminuzione dei prezzi": in altri termini, che la "soluzione teorica" sia in linea di principio calcolabile o meno è una questione di

[5] In realtà Walras ammette in qualche occasione che, pur soddisfacendo la condizione di eguaglianza fra numero di incognite e numero di equazioni indipendenti, un modello possa non avere soluzione (Walras, 1988, pp. 96-97) o, al contrario, possa presentare soluzioni multiple (Walras, 1988, pp. 96-97). Tuttavia Walras tende quasi sempre a sviluppare le proprie argomentazioni dando per scontato che il problema della determinatezza dell'equilibrio possa considerarsi risolto. Da un punto di vista generale è evidente che il tipo di formalizzazione adottato da Walras e, in particolare, il modo in cui egli affronta il problema dell'esistenza e dell'unicità dell'equilibrio non soddisfano affatto gli standard di rigore odierni. Per gli scopi che ci prefiggiamo in questa sede, tuttavia, questo problema può essere accantonato senza conseguenze.

secondaria importanza, quando si riconosca che in ogni caso è il mercato a "risolvere" il problema da un punto di vista "pratico" o "empirico".

Questa osservazione ci riconduce al secondo requisito che, a parere di Walras, deve essere soddisfatto affinché un modello possa dirsi "risolto": a suo parere, infatti, si tratta di mostrare che è "proprio la concatenazione dei fenomeni della realtà a costituire la risoluzione empirica del sistema di equazioni" in cui si traduce il modello in esame. Questa esigenza permea tutta la costruzione teorica walrasiana, anche se Walras non riuscirà mai a razionalizzare compiutamente e a esprimere in maniera formalmente accettabile le implicazioni teoriche del suo assunto.

In effetti, per soddisfare il secondo requisito posto da Walras, il teorico dovrebbe procedere nella maniera seguente. Innanzitutto dovrebbe affiancare al sistema di equazioni algebriche ordinarie che descrive il modello di equilibrio in esame un sistema di equazioni funzionali, il cui compito è invece quello di descrivere "la concatenazione dei fenomeni della realtà": in altri termini, il sistema di equazioni funzionali associato a ciascun modello di equilibrio dovrebbe rappresentare o imitare il processo dinamico, basato sui movimenti al rialzo o al ribasso dei prezzi (nel caso dello scambio) o sui movimenti di altre variabili di stato opportunamente specificate (nel caso della produzione), mediante il quale il "meccanismo della concorrenza sul mercato" realizza la "risoluzione empirica del sistema di equazioni" ordinarie da cui si era partiti. Naturalmente, per conseguire questo obiettivo, è necessario innanzitutto che il processo dinamico descritto dal sistema di equazioni funzionali converga a una soluzione stazionaria, che si configurerebbe allora come la "soluzione empirica o pratica" raggiunta dal mercato, e in secondo luogo che questa soluzione stazionaria coincida la "soluzione matematica o teorica" del sistema di equazioni ordinarie descriventi il modello.

Walras non si sottrae di certo ai compiti impostigli dalle sue stesse prescrizioni metodologiche. In effetti, per ciascuno dei quattro modelli di equilibrio egli cerca innanzitutto di costruire uno specifico sistema di equazioni funzionali (di fatto, equazioni alle differenze), che interpreta come una rappresentazione idealizzata del meccanismo di aggiustamento concorrenziale per tentativi ed errori, ovvero "par tâtonnement" (Walras, 1988, p. 189, **2-4**; p. 698, **3-4**); di qui deriva l'espressione "*tâtonnement*" con la quale il processo di aggiustamento walrasiano sarà successivamente indicato nella letteratura. In secondo luogo egli cerca di mostrare che il processo dinamico converge in ciascun caso a una soluzione stazionaria, interpretabile come la "soluzione empirica o pratica" realizzata dal meccanismo di mercato, e che questa soluzione stazionaria coincide invariabilmente con la "soluzione matematica o teorica" del sistema di equazioni ordinarie che descrivono il modello di equilibrio rilevante (Walras, 1988, p. 93, 307, 375; p. 189, **2-4**; p. 461, **4**)[6].

Per quanto riguarda l'aspetto dinamico della teoria, tuttavia, le capacità matematiche di Walras si rivelano ancor più modeste di quelle di cui egli aveva dato prova nella costruzione dei modelli di equilibrio e nella soluzione degli associati sistemi di equazioni ordinarie. In effetti, in nessun caso Walras si dimostra capace di formalizzare compiutamente il processo di aggiustamento dinamico mediante un appropriato sistema di equazioni alle differenze; *a fortiori*, in nessun caso egli riesce realmente a dimostrare che il processo dinamico converge a una soluzione stazionaria. Sulla base di alcuni tentativi euristici di dimostrazione, Walras si ritiene autorizzato ad affermare, nella prima edizione degli *Eléments*, che in ciascun caso il processo di aggiustamento dinamico converge "certamente" a una soluzione stazionaria, che coincide anche con la soluzione "teorica o matematica" del corrispondente modello di equilibrio. Ma dopo che nel 1884 Wicksteed gli fa notare, mediante un contro-esempio, che la sua presunta "dimostrazione" della convergenza all'equilibrio del processo di aggiustamento dinamico è falsa, Walras mitiga le sue pretese, sostituendo l'espressione "convergenza certa" con la meno compromettente espressione "convergenza probabile" in tutte le edizioni successive degli *Eléments* (Walras, 1988, pp. 195, 326, 328, **2-4**; p. 698, **3-4**).

[6] L'esame delle relazioni sussistenti fra equilibrio e *tâtonnement* negli *Eléments* e negli altri scritti teorici di Walras è sviluppato in grande dettaglio, anche analitico, in (Donzelli, 2005), sul quale il presente lavoro in parte si basa.

Incerto, in realtà, è anche il valore di verità dell'affermazione, reiterata da Walras, secondo la quale la "soluzione empirica o pratica" coincide identicamente con la "soluzione teorica o matematica". Walras è pienamente consapevole della rilevanza di questa affermazione: come abbiamo visto, infatti, la computabilità della "soluzione teorica" è perlomeno dubbia per Walras; per questa ragione la rilevanza pratica e lo stesso contenuto empirico della teoria dell'equilibrio generale risulterebbero compromessi, se il meccanismo di mercato concorrenziale non si desse carico di condurre automaticamente l'economia considerata a una configurazione che coincide con l'ipotetica "soluzione teorica". Tuttavia, se è certo che per Walras la coincidenza delle due "soluzioni" è un'esigenza irrinunciabile della teoria, non è altrettanto chiaro che egli comprenda esattamente quali limitazioni tale esigenza impone ai processi di aggiustamento ammissibili. E' precisamente questo il problema che intendiamo affrontare nel prossimo paragrafo, con riferimento al modello di puro scambio.

4. Il modello di puro scambio nel 1874

Il modello di puro scambio, il più semplice fra i quattro modelli di equilibrio formulati da Walras, è già compiutamente elaborato negli scritti del 1874 (Walras, 1974; 1988, Section II, pp. 67-270)[7]. Questo modello considera un'economia di mercato concorrenziale, nella quale è presente un numero finito di merci (beni di consumo); lo spazio delle merci è dunque uno spazio vettoriale euclideo di dimensionalità pari al numero delle merci. L'economia è costituita da un numero finito di consumatori-scambisti, d'ora innanzi indicati semplicemente come consumatori, che scambiano fra loro determinate quantità delle varie merci. Ciascun consumatore è caratterizzato da un vettore non-negativo di dotazioni, consistente in quantità specificate (non tutte nulle) delle varie merci, e da una funzione di utilità, che associa un numero reale a ciascun possibile paniere di consumo, e cioè a ciascun punto dell'insieme di consumo, un sottoinsieme non-vuoto dell'ortante non-negativo dello spazio delle merci. I dati del modello di puro scambio consistono quindi nelle caratteristiche dei consumatori, e cioè nelle terne costituite, per ciascun consumatore, da un insieme di consumo, un vettore di dotazioni e una funzione di utilità.

Il sistema dei prezzi consiste in un vettore non-negativo e non-nullo di numeri reali, di dimensionalità pari al numero delle merci esistenti nell'economia, normalizzato mediante la scelta di una merce sempre desiderata come numerario, il cui prezzo è posto identicamente uguale a uno. Per ogni sistema dei prezzi ciascun consumatore sceglie un paniere di consumo che massimizza la propria funzione di utilità, subordinatamente al vincolo di bilancio, e cioè alla condizione per la quale il costo del paniere scelto non deve eccedere il valore delle dotazioni ai prezzi dati. Date le assunzioni sulle caratteristiche dei consumatori accolte da Walras (opportunamente qualificate e integrate quando necessario), la scelta individuale è sempre ben definita e univoca. Aggregando le scelte compiute da tutti i consumatori per ogni possibile sistema di prezzi, otteniamo per ciascuna merce la funzione di domanda aggregata e quindi, sottraendo da questa il vettore aggregato delle dotazioni, la funzione di eccesso di domanda aggregata.

Ponendo uguale a zero la funzione di eccesso di domanda aggregata, otteniamo un sistema di equazioni, in numero pari a quello delle merci, che esprimono le condizioni di equilibrio di mercato. Per la cosiddetta "legge di Walras", una delle equazioni è linearmente dipendente dalle altre, cosicché il numero delle equazioni indipendenti risulta infine pari al numero delle variabili incognite (prezzi) da determinare, tenuto conto del fatto che il prezzo del numerario è posto uguale all'unità. Le radici di questo sistema di equazioni costituiscono il sistema dei prezzi di equilibrio: esse rappresentano la "soluzione teorica o matematica" del modello di puro scambio nel senso di Walras.

[7] Qualche cambiamento del modello, per la parte riguardante la normalizzazione del sistema dei prezzi mediante l'adozione di un numerario nel caso in cui le merci siano in numero maggiore di due, è introdotto da Walras poco dopo la pubblicazione del primo volume della prima edizione degli *Eléments*. Queste modificazioni, incorporate da Walras già nel secondo *mémoire* (1876a), permangono successivamente inalterate nelle successive edizioni degli *Eléments*.

A questo sistema di equazioni algebriche ordinarie è affiancato un sistema di equazioni funzionali, sommariamente specificato da Walras, che descrive il processo di aggiustamento all'equilibrio. Nel caso del modello di puro scambio, le variabili di stato del processo di aggiustamento all'equilibrio sono rappresentate dai prezzi: più precisamente, la "regola walrasiana di aggiustamento dei prezzi" prevede in questo caso che il prezzo di ciascuna merce (diversa dal numerario) cresca, diminuisca o resti invariato a seconda che l'eccesso di domanda aggregato sul rispettivo mercato sia positivo, negativo o nullo. Secondo Walras (1988, pp. 188-197, **1** e **2-4**), partendo da prezzi arbitrari ("criés au hasard") e operando attraverso aggiustamenti successivi dei prezzi che hanno luogo mercato per mercato, il processo dinamico di *tâtonnement*, che rispecchia, sia pure in maniera in maniera idealizzata, il funzionamento dei mercati concorrenziali reali[8], converge a una soluzione stazionaria, che non solo rappresenta la "soluzione pratica o empirica" nel senso di Walras, ma coincide anche con la "soluzione teorica o matematica" del sistema di equazioni ordinarie che esprimono in maniera formale il modello di equilibrio.

Naturalmente, perché sia possibile affermare che le due "soluzioni" coincidono, è necessario (anche se di certo non sufficiente) supporre che i dati del modello di puro scambio restino inalterati nel corso del processo di aggiustamento all'equilibrio: in effetti, se questa condizione non si verificasse, anche ammettendo che il processo dinamico di *tâtonnement* converga effettivamente a una soluzione stazionaria del sistema di equazioni funzionali che lo governa (cosa che in realtà Walras non riesce mai a dimostrare), non sarebbe comunque possibile asserire che tale "soluzione empirica" coincide con la "soluzione matematica" del modello di equilibrio originario, giacché le due "soluzioni" verrebbero in tal caso a dipendere da configurazioni diverse di dati.

Naturalmente Walras è consapevole dell'esigenza che i dati del modello non si modifichino nel corso del processo di aggiustamento all'equilibrio. In effetti, egli è talmente consapevole della centralità di questo assunto per la validità e la sopravvivenza stessa della propria impostazione teorica che giunge a rivendicare con orgoglio il "diritto del teorico" di assumere l'invarianza dei dati nel corso processo dinamico di *tâtonnement*:

> C'est le droit du théoricien du supposer les éléments des prix invariables durant le temps qu'il emploie à formuler la loi d'établissement des prix d'équilibre. (Walras, 1988, p. 146)

Per comprendere appieno il significato di questo passo, tuttavia, è utile considerare anche le frasi immediatamente successive:

> Mais c'est son devoir, une fois cette opération terminée, de se souvenir que les éléments des prix sont essentiellement variables et de formuler en conséquence la loi de variation des prix d'équilibre. […] Et, au surplus, la première opération conduit immédiatement à la seconde. En effet, les éléments d'établissement des prix sont aussi les éléments de variation des prix. Ces éléments d'établissement des prix sont les utilités des marchandises et les quantités possédées de ces marchandises. Tells sont donc les causes et conditions premières de variation des prix.

Da questo brano risulta innanzitutto evidente che per Walras l'economia analizzata non è affatto stazionaria: per Walras, infatti, "gli elementi dei prezzi", e cioè i dati del modello di puro scambio (funzioni di utilità e dotazioni), "sono essenzialmente variabili". Secondo Walras, tuttavia, assumere l'invarianza dei dati è un'operazione legittima per gli scopi della teoria, e cioè per consentire al teorico di studiare nelle condizioni più opportune il processo di formazione dei prezzi di equilibrio. Ma in realtà la legittimità di questo assunto potrebbe essere rivendicata a buon diritto

[8] Questo convincimento di Walras si manifesta in maniera trasparente ed esplicita in alcune lettere su questo argomento che egli scrive a colleghi e sostenitori: si vedano, in particolare, le lettere a Pantaleoni, von Bortkiewicz e Pareto, pubblicate in (Jaffé, 1965, Vol. II, rispettivamente pp. 343-347, 434, 630). Su questo punto si veda anche (Walras, 1988, p. 93; pp. 700-702, **3-4**).

solo se la variabilità dei dati nel tempo dipendesse esclusivamente da cause esogene, indipendenti dalle scelte e dai comportamenti dei consumatori; se invece i dati dovessero variare anche per cause endogene, allora nessun teorico potrebbe legittimamente arrogarsi il diritto di sterilizzare quella variabilità dei dati che è il prodotto delle stesse scelte e degli stessi comportamenti che egli pretende di spiegare. Si deve quindi concludere che l'ipotesi walrasiana di invarianza dei dati nel corso del processo di aggiustamento all'equilibrio può essere considerata legittima solo nel caso in cui si possa escludere che durante tale processo si verifichi qualsiasi fenomeno di natura endogena atto a modificare i dati del modello di equilibrio.

Non è tuttavia affatto chiaro se, nel 1874, Walras sia o meno consapevole dei limiti stringenti che questo requisito logico impone ai processi di aggiustamento ammissibili. Per valutare questo aspetto, può essere utile analizzare un celebre brano, che Walras introduce a scopi illustrativi proprio all'inizio della sua trattazione della teoria dello scambio di due merci l'una contro l'altra[9]. In effetti, per chiarire mediante un esempio come funziona in pratica il meccanismo concorrenziale, Walras prende in esame un mercato concorrenziale molto ben organizzato, la Borsa Valori di Parigi, studiando in particolare le operazioni di scambio riguardanti uno specifico titolo di Stato, la "rendita francese 3%"[10]:

> Prenons, par exemple, en les séparant de toutes les autres, les opérations sur la rente française 3%, à la bourse de Paris.
>
> Le 3% est, comme on dit, à 60F. […] Nous appelleront *offre effective* l'offre ainsi faite d'une quantité déterminée de marchandise à un prix déterminé. […] Nous appelleront *demande effective* cette demande d'une certaine quantité de marchandise à un certain prix.
>
> Nous avons maintenant trois hypothèses à faire suivant que la demande est *égale*, *supérieure* ou *inférieure* à l'offre.
>
> 1re Hypothèse. On demande à 60 F une quantité égale à celle qui est offerte à ce même prix. Chaque agent vendeur ou acheteur trouve exactement sa *contrepartie* chez un autre agent acheteur ou vendeur. Le cours de 60 F se maintient; il y a *état stationnaire* ou *équilibre* du marché.
>
> 2e Hypothèse. Les agents acheteurs ne trouvent plus leur contrepartie, ce qui prouve que la quantité de 3% demandée au prix de 60 F est supérieure à la quantité offerte au même prix. […] Ils vont à l'enchère.
>
> Cette enchère produit un double résultat: 1° des acheteurs à 60 F, qui ne sont plus acheteurs à 60,05 F, se retirent; 2° des vendeurs à 60,05 F, qui n'étaient pas vendeurs à 60 F, surviennent. […]
>
> 3e Hypothèse. Les agents vendeurs ne trouvent plus leur contrepartie, ce qui indique que la quantité de 3% offerte au prix de 60 F est supérieure à la quantité demandée au même prix. […] Ils vont au rabais.
>
> Double résultat: 1° retrait de vendeurs à 60 F, qui ne sont plus vendeurs à 59,95 F; 2° survenue d'acheteurs à 59,95 F, qui n'étaient pas acheteurs à 60 F. […]

[9] Walras (1988, pp. 71-72, **1**). Questo brano è stato oggetto di innumerevoli controversie interpretative. Fra gli autori che si sono cimentati in questo esercizio ermeneutico, giungendo spesso a risultati contrapposti, ricordiamo almeno: Hicks (1934, pp. 342-343), (1939, p. 128), (1976, p. 151); Goodwin (1951), (1953); Jaffé (1954), (1967), (1980), (1981, pp. 315-316); Patinkin (1956, pp. 377-385), (1965, pp. 531-540); Newman (1965, pp. 101-103); Walker (1972), (1978a), (1978b), (1988), 1996). Come vedremo, le ragioni di una così ampia e apparentemente inesauribile varietà di posizioni risiedono sia nell'effettiva ambiguità del passo originale, sia nel fatto che Walras interviene in seguito (a partire dalla seconda edizione degli *Eléments*) sullo stesso brano, rimaneggiandolo in maniera significativa.

[10] E' interessante osservare come un esempio del tutto simile, riguardante tuttavia il mercato del grano, anziché il mercato di un'attività finanziaria, si trovi all'inizio del primo *mémoire* di Walras (1874, p. 32), successivamente ripubblicato senza modificazioni di rilievo in (1877b) e in (1883). Questa osservazione, come vedremo, presenta una certa rilevanza dal punto di vista storiografico.

Come si vede da questo passo, Walras prevede esplicitamente che, in una situazione di disequilibrio di mercato (eccesso di domanda o eccesso di offerta), alcuni degli agenti che si trovano sul lato corto del mercato (rispettivamente, domanda oppure offerta), e rischiano quindi di essere razionati, modifichino il prezzo (rispettivamente, al rialzo o al ribasso); ma egli prevede anche che, ai prezzi di disequilibrio via via annunciati sul mercato, alcune transazioni abbiano effettivamente luogo.

Questa descrizione del meccanismo di aggiustamento concorrenziale, se presa alla lettera, comporta almeno due problemi.

Il primo, di ordine più generale, anche se generalmente trascurato dagli interpreti e dai commentatori, è il seguente. Come abbiamo ricordato sopra, la teoria walrasiana dello scambio permette di determinare, per ogni dato sistema dei prezzi, i piani di azione (cioè i piani di consumo e, conseguentemente, di scambio) scelti da tutti i consumatori che operano sul mercato. Ora, se questi piani sono fra loro compatibili, e cioè se la domanda è uguale all'offerta in tutti i mercati, i piani di azioni individuali sono tutti eseguibili e vengono effettivamente eseguiti: questo significa che, se i mercati sono in equilibrio, la teoria walrasiana consente di spiegare non solo i piani di azione scelti, ma anche le azioni eseguite da tutti i consumatori. Se però i piani di azione individuali non sono compatibili, perché vi è eccesso di domanda o di offerta su qualche mercato e, di conseguenza, qualche consumatore risulterebbe necessariamente razionato nel caso in cui si effettuassero transazioni, la teoria walrasiana, in assenza di ipotesi aggiuntive, non consente di spiegare o predire ciò che i consumatori effettivamente faranno, sempre che si consenta loro di fare qualcosa: questo significa che, se i mercati sono in disequilibrio, e se si ammette che alcune transazioni possano aver luogo anche in queste circostanze, come sembra di potersi evincere dal brano di Walras sopra riportato, non è possibile far appello alla teoria walrasiana per spiegare o predire i comportamenti osservabili che si manifestano nel corso del processo dinamico che si viene in tal caso a realizzare, dato che questa teoria è di per sé insufficiente alla bisogna.

Tuttavia, se anche si trovasse il modo, mediante integrazioni e ipotesi aggiuntive, di utilizzare la teoria walrasiana, opportunamente integrata o modificata, per spiegare in quale modo evolve il processo dinamico in disequilibrio, insorgerebbe comunque il secondo problema cui abbiamo fatto cenno sopra. Infatti, se si ammettesse che alcune transazioni possono effettivamente verificarsi in disequilibrio, i dati del modello di puro scambio (e specificamente le dotazioni individuali) ne risulterebbero necessariamente alterati, cosicché l'equilibrio al quale si dovesse eventualmente convergere sarebbe inevitabilmente diverso da quello che potrebbe essere determinato sulla base dei dati iniziali. Utilizzando la terminologia walrasiana, si potrebbe in tal caso concludere che la "soluzione pratica o empirica", realizzata dal meccanismo di mercato concorrenziale attraverso un processo di aggiustamento in cui si ammettono transazioni in disequilibrio, risulterebbe diversa dalla "soluzione matematica o teorica", corrispondente al sistema di equazioni algebriche ordinarie che esprime formalmente il modello di puro scambio corrispondente ai dati iniziali.

Per concludere su questo punto, anche se nel 1874 Walras è ben consapevole dell'assoluta necessità di assumere che i dati del modello di puro scambio non subiscano alterazioni durante il processo di aggiustamento all'equilibrio, egli non sembra altrettanto consapevole delle limitazioni che questa esigenza impone alla sua analisi. In effetti Walras sembra lasciarsi guidare da una visione preanalitica molto forte, improntata a un realismo quasi ingenuo, che trova espressione nel brano sopra citato: secondo questa visione il meccanismo concorrenziale opera attraverso un processo che richiede tempo – lo stesso tempo "reale" lungo il quale evolve l'economia considerata – ed è guidato dai comportamenti osservabili degli stessi consumatori, che modificano i prezzi secondo la "regola walrasiana di aggiustamento" e compiono transazioni in disequilibrio. Che una simile visione contrasti con le esigenze della teoria è del tutto evidente. Ma che nel 1874 Walras si faccia comunque guidare da tale visione è più che probabile, come è testimoniato, d'altro canto, sia dal brano sopra discusso, sia, in maniera ancora più esplicita, dal modo in cui egli tratta il processo di aggiustamento nei modelli con produzione, su cui ci soffermeremo in maniera dettagliata nel successivo par. 6.

5. Il modello di puro scambio nell'ultimo ventennio dell'Ottocento

Nel 1883 il matematico Joseph Bertrand recensisce una raccolta di saggi di Walras appena pubblicata, la *Théorie mathématique de la richesse sociale*, che riproduce fra l'altro, senza variazioni di rilievo, i contenuti del suo primo *mémoire*, pubblicato nel 1874. Questo *mémoire*, come sopra ricordato (nota 10), contiene un'illustrazione del funzionamento di un mercato concorrenziale quasi identica a quella formulata nel brano della prima edizione degli *Eléments* che abbiamo riprodotto e commentato nel paragrafo precedente. Bertrand, non senza qualche giustificazione, interpreta le affermazioni di Walras in quel *mémoire* come un esplicito riconoscimento che gli scambi possono effettivamente realizzarsi non solo in equilibrio, ma anche fuori dall'equilibrio. Da questo egli inferisce che gli scambi a prezzi di disequilibrio, inducendo continui cambiamenti dei dati del problema, impediranno al processo dinamico di aggiustamento di convergere alla soluzione "teorica o matematica" del sistema di equazioni che esprimono formalmente il modello di equilibrio: queste equazioni, infatti, si basano sui dati originari del problema, e non certo su quelli modificati dal processo di scambio. Pertanto, secondo Bertrand, il problema dello scambio, come impostato da Walras, risulta indeterminato.

Walras reagisce a questa critica in numerose occasioni. Dapprima, in un lavoro pubblicato nel 1885 e dedicato a tutt'altro argomento (precisamente, alla ricostruzione della figura e del pensiero di Hermann-Henri Gossen), egli trova comunque il modo di replicare a Bertrand, sia pure senza nominarlo, in una lunga nota a piè di pagina: in questa nota Walras afferma infatti che, in un mercato ideale ("sur le marché théorique"), gli scambi sono sospesi fino a quando il mercato è in disequilibrio; pertanto, da un punto di vista puramente teorico, il problema dell'indeterminatezza dell'equilibrio, sollevato da Bertrand, scompare[11].

Walras tuttavia non si accontenta di questo chiarimento incidentale, introdotto in un oscuro lavoro dedicato ad altro argomento. Al contrario, riconoscendo implicitamente l'ambiguità del passo degli *Eléments* sopra citato, e cogliendo l'occasione dell'uscita della seconda edizione degli *Eléments* nel 1889, egli interviene anche su quest'opera. Nella seconda edizione, infatti, Walras modifica il passo sopra discusso in tre luoghi distinti, con il risultato che gli scambi risultano ora sospesi quando c'è eccesso di domanda o di offerta sul mercato, e hanno invece luogo quando il mercato è in equilibrio. Più precisamente, lasciando il resto del brano del tutto inalterato, Walras aggiunge sei parole nel caso di eccesso di domanda ("Théoriquement, l'échange doit être suspendu"), inserisce quattro parole nel caso di eccesso di offerta ("Suspension de l'échange"), e aggiunge infine quattro parole nel caso di equilibrio di mercato ("L'échange a lieu") (Walras, 1988, pp. 71-72, **2-4**).

Nella seconda edizione, pertanto, l'esplicita assunzione di "assenza di scambi fuori dall'equilibrio" permette a Walras di risolvere alcuni problemi, anche se non tutti i problemi, che avevano reso oscura la teoria del *tâtonnement* nello scambio nella prima edizione: l'ipotesi di invarianza dei dati nel processo di aggiustamento all'equilibrio è ora resa rigorosa; inoltre si chiarisce una volta per tutte che l'unico tipo di disequilibrio compatibile con la "regola walrasiana di aggiustamento dei prezzi", e con l'associata teoria del *tâtonnement* nello scambio, è inosservabile: si può ancora parlare di piani di azione di disequilibrio, ma non si possono più avere azioni o comportamenti osservabili in disequilibrio. Potrebbe sembrare che l'esplicita esclusione di

[11] Walras, 1985, p. 312, n. 1. Affermazioni del tutto simili si trovano anche in un *mémoire* allegato a una lettera che Walras invia a Pareto nel 1895 (Jaffé, 1965, vol. II, p. 630); è probabile, tuttavia, che la prima bozza di questo *mémoire* risalga a qualche anno prima. Si noti che, mentre l'articolo del 1885 dedicato a Gossen è il primo lavoro in cui Walras introduce esplicitamente l'ipotesi che gli scambi abbiano luogo solo in equilibrio, intesa come *un'ipotesi teorica generale*, questo articolo non è invece il primo in cui l'assenza di scambi fuori dall'equilibrio sia menzionata da Walras come *un fatto istituzionale relativo a uno specifico mercato*: infatti, in un lavoro applicato riguardante il funzionamento della Borsa Valori, scritto cinque anni prima, Walras (1880, pp. 408, 432) rileva che alla Borsa di Parigi, in quegli anni, la prassi prevalente nei mercati delle attività finanziarie è che nessuno scambio possa aver luogo prima che l'equilibrio sia stato raggiunto.

ogni tipo di comportamento osservabile in disequilibrio, dovuta all'ipotesi di "assenza di scambi fuori dall'equilibrio", comporti una perdita significativa in termini di capacità predittiva; ma questo timore è in realtà infondato: infatti, per le ragioni sopra ricordate, in assenza di ipotesi aggiuntive la teoria walrasiana non consentirebbe comunque di predire alcun tipo di comportamento osservabile in disequilibrio.

Con l'ipotesi di "assenza di scambi fuori dall'equilibrio", la struttura temporale dell'analisi diviene più chiara di quanto non fosse in precedenza. Da un punto di vista temporale, il "mercato" (cioè, l'economia di scambio) in esame diviene qualcosa di autocontenuto, che non presenta alcuna necessaria connessione né con i "mercati" precedenti, né con quelli successivi (sempre che esistano); come dice Walras (1988, p. 77), quando il "mercato" finisce, gli scambisti "s'en vont chacun de leur coté". I dati non variano dall'inizio alla fine del "mercato", cioè fino al raggiungimento dell'equilibrio; ma in seguito essi tipicamente variano, giacché, come abbiamo visto, "les éléments des prix sont essentiellement variables" (Walras, 1988, p. 146). Durante il processo di *tâtonnement* non può accadere nulla di osservabile, dato che gli scambi non possono aver luogo e tutte le altre possibili fonti di cambiamento dei dati sono ugualmente escluse: questo significa, tuttavia, che il tempo lungo il quale evolve il *tâtonnement* è essenzialmente un tempo "logico", non "reale", e che il *tâtonnement*, essendo un processo puramente virtuale, richiede solo un istante di tempo "reale" per realizzare compiutamente i propri effetti. Inoltre, quando un equilibrio è raggiunto, tutti gli scambi pianificati hanno luogo nello stesso istante ai prezzi di equilibrio. Come scrive lo stesso Walras:

> Le prix courant théorique est essentiellement un prix unique résultant, *à un moment donné*, d'un échange général. (Walras, 1885, p. 312, n. 1; corsivo aggiunto)

Per concludere, il tipo di equilibrio di un'economia di puro scambio che emerge dall'ipotesi di "assenza di scambi fuori dall'equilibrio" appare così strettamente connesso a un specifico istante di tempo "reale", e precisamente a quell'istante di tempo "reale"cui possono essere riferiti i dati ai quali l'equilibrio è associato, da meritare il nome di "equilibrio istantaneo".

6. I modelli con produzione dal 1876 al 1896

Come abbiamo ricordato alla fine del par. 4, la visione preanalitica del processo di aggiustamento concorrenziale che permea il pensiero di Walras agli inizi del suo lungo percorso scientifico è una visione ingenuamente realistica, che Walras cerca faticosamente di tradurre in un apparato analitico formale, rappresentato da vari modelli di *tâtonnement* associati ai corrispondenti modelli di equilibrio.

Se l'interpretazione del processo di *tâtonnement* nello scambio, così come è formulato da Walras negli scritti del 1874, presenta numerose ambiguità dovute alle difficile coesistenza fra visione preanalitica ed esigenze dell'analisi, l'interpretazione del processo di *tâtonnement* nei due modelli con produzione sviluppati da Walras nel terzo e quarto *mémoire*, pubblicati rispettivamente nel 1876 e nel 1877, e nel secondo volume della prima edizione degli *Eléments*, pubblicato nel 1877, non presenta invece alcuna ambiguità: in tutti questi casi, infatti, trionfa la visione preanalitica di Walras, a discapito delle esigenze dell'analisi, che in effetti è spesso fallace. Come vedremo nel seguito di questo paragrafo, l'impostazione di fondo accolta da Walras negli anni in cui si forma e trova iniziale espressione la sua teoria della produzione (1876-1877) perdura poi per almeno vent'anni, perlomeno fino alla pubblicazione terza edizione degli *Eléments* (1896), nonostante i numerosi cambiamenti di dettaglio via via introdotti da Walras nel tentativo di porre rimedio alle molteplici difficoltà manifestatesi nel frattempo.

Per quanto riguarda la rappresentazione analitica del fenomeno produttivo nel periodo 1876-1896, Walras ipotizza che nell'economia considerata esista un numero finito positivo sia di beni di consumo, sia di servizi dei vari tipi di capitali (per definizione, i beni di consumo sono non-

durevoli, mentre i capitali sono durevoli; i servizi dei capitali sono necessariamente non-durevoli). Se i capitali non sono né alienabili né producibili, ci si trova in un'"economia di scambio e produzione", nella quale i servizi dei capitali, posseduti da consumatori-proprietari, possono essere consumati direttamente oppure trasformati in beni di consumo mediante il ricorso a specificati processi produttivi; se invece si ammette che almeno alcuni fra i capitali siano producibili, ci si trova in un'"economia con formazione di capitale", nella quale la produzione di beni capitali nuovi, mediante il ricorso a specificati processi produttivi, costituisce un'ulteriore attività economica, che va ad aggiungersi a quelle già contemplate come possibili nell'"economia di scambio e produzione".

Concentriamoci ora, per semplicità, sul primo tipo di economia con produzione e sul corrispondente modello di equilibrio: il modello di scambio e produzione, infatti, è sufficiente per sviluppare la maggior parte delle considerazioni che ci stanno a cuore per quanto concerne l'equilibrio e il processo di *tâtonnement* nei modelli in cui è ammessa la possibilità di svolgere attività produttive. Sull'"economia con formazione di capitale" e sul corrispondente modello di equilibrio, che è ovviamente più complesso e problematico del precedente, ritorneremo brevemente alla fine di questo paragrafo.

Anche nel modello di scambio e produzione lo spazio delle merci è uno spazio vettoriale euclideo di dimensionalità pari al numero delle merci esistenti nell'economia; in questo caso, tuttavia, le merci non sono solo beni di consumo, ma anche servizi dei capitali. I consumatori sono proprietari di quantità specificate (non-negative e non-nulle) di servizi dei capitali, che essi possono consumare direttamente oppure vendere sul mercato ad altri consumatori come servizi di consumo o ai produttori come servizi produttivi. Sommando le quantità di servizi possedute da tutti i consumatori-proprietari, otteniamo il vettore delle dotazioni aggregate di servizi dei capitali, un punto nell'interno dell'ortante non-negativo dello spazio delle merci. Ciascun consumatore-proprietario è anche caratterizzato da una funzione di utilità: questa funzione associa un numero reale a ciascun possibile paniere di consumo, e cioè a ciascun punto dell'insieme di consumo, un sottoinsieme non-vuoto dell'ortante non-negativo dello spazio delle merci. Con riferimento al fenomeno produttivo, Walras ipotizza che la tecnologia, la stessa per tutti i produttori, sia a produzione singola e a coefficienti fissi: nel modello di scambio e produzione questo significa che, per ciascun output (bene di consumo), è possibile definire un'industria costituita da un insieme di produttori, identici dal punto di vista tecnologico, il cui numero è indeterminato. Ciascun produttore appartenente a un'industria può ottenere un'unità dell'output prodotto in quell'industria mediante l'impiego di quantità non-negative specificate di input (servizi dei capitali), indipendenti dalla scala di produzione. Dato un vettore non-negativo di quantità di output, risulta definito, in base alla tecnologia, il corrispondente vettore non-negativo di domande condizionate di input.

In questo modello il sistema dei prezzi è costituito da un vettore non-negativo e non-nullo di prezzi dei beni di consumo e dei servizi dei capitali; il sistema dei prezzi è normalizzato mediante la scelta di un bene di consumo sempre desiderato come numerario, il cui prezzo è posto uguale all'unità. Anche in questo modello Walras continua a supporre che ciascun consumatore-proprietario si comporti in maniera concorrenziale, e cioè che massimizzi la propria funzione di utilità subordinatamente al proprio vincolo di bilancio, prendendo i prezzi come parametri dati; il vincolo di bilancio consiste in questo caso nella condizione che, ai prezzi dati, la spesa per l'acquisto di beni e servizi di consumo non ecceda il valore delle quantità di servizi venduti da ciascun consumatore. Date le assunzioni sulle caratteristiche dei consumatori-proprietari accolte da Walras (opportunamente qualificate e integrate quando necessario), la scelta individuale è sempre ben definita e univoca. Aggregando le scelte compiute da tutti i consumatori-proprietari per ogni possibile sistema di prezzi, otteniamo per ciascuna merce (bene di consumo o servizio) la funzione di domanda aggregata dei consumatori-proprietari. Quindi, per ciascun servizio, sottraendo dalla corrispondente dotazione aggregata la funzione di domanda aggregata dei consumatori-proprietari, otteniamo la funzione di eccesso di offerta aggregata di quel servizio da parte dei consumatori-proprietari. Infine, dato il sistema dei prezzi, per ciascuna industria è possibile definire il costo

unitario di produzione, pari al valore delle quantità di input impiegate per produrre un'unità dell'output prodotto in quell'industria, nonché il profitto unitario, pari alla differenza tra il prezzo dell'output e il costo unitario di produzione.

L'equilibrio del modello di scambio e produzione, come definito da Walras (1988, pp. 301-307), consiste allora in un sistema dei prezzi che soddisfa le due condizioni seguenti: 1) per ciascun bene di consumo, il prezzo dev'essere uguale al costo unitario di produzione, il che implica che nell'industria che produce quel bene di consumo i profitti siano nulli; 2) per ciascun servizio, la domanda condizionata di tutti i produttori, e cioè la quantità di quel servizio necessaria per produrre le quantità aggregate dei beni di consumo domandate dai consumatori-proprietari a quei prezzi, deve uguagliare l'eccesso di offerta aggregata di quel servizio da parte dei consumatori-proprietari a quei prezzi. Le condizioni di equilibrio sono espresse da Walras mediante due sistemi di equazioni, che costituiscono in realtà un solo sistema integrato. Secondo Walras, l'uguaglianza fra numero delle equazioni indipendenti e numero delle incognite è sufficiente, in questo caso, ad assicurare la risolubilità del modello di equilibrio: le radici del sistema integrato di equazioni rappresentano proprio la "soluzione teorica o matematica" del modello, nel senso di Walras.

E' interessante osservare che, benché in equilibrio i comportamenti dei produttori possano essere interpretati come il risultato di scelte massimizzanti[12], Walras non assume in realtà che i produttori giungano a determinare i propri comportamenti, tanto in equilibrio quanto fuori dall'equilibrio, seguendo la regola concorrenziale di massimizzazione del profitto a prezzi dati: data l'ipotesi di coefficienti fissi, infatti, tale regola darebbe luogo in molti casi a scelte non ben determinate (indeterminate o indefinite, a seconda che il profitto unitario sia nullo o positivo), scelte che Walras non avrebbe saputo come trattare da un punto di vista analitico. Per evitare questa difficoltà, e forse anche per altre ragioni, Walras introduce fin dall'inizio una diversa regola, di carattere esplicitamente dinamico, che spiega il comportamento (aggregato) dei produttori: dato il sistema dei prezzi, la "regola walrasiana di aggiustamento delle quantità" prevede infatti che, a partire da quantità dei beni di consumo determinate a caso ("au hasard"), la quantità prodotta di ciascun bene cresca, diminuisca o resti invariata a seconda che il profitto unitario nell'industria in cui si produce quel bene sia positivo, negativo o nullo[13].

Naturalmente Walras è interessato a mostrare che, operando attraverso aggiustamenti successivi delle quantità che hanno luogo industria per industria, il processo dinamico di *tâtonnement* delle quantità prodotte di beni di consumo, governato dalla "regola" sopra precisata, converge a una soluzione stazionaria: questa soluzione dovrebbe proprio rappresentare, secondo Walras, la "soluzione pratica o empirica" del problema della produzione, realizzata in maniera automatica dal meccanismo di mercato concorrenziale. Tuttavia, se si suppone che il sistema di prezzi assegnato sia quello di equilibrio, la soluzione stazionaria, alla quale auspicabilmente converge il processo di *tâtonnement* delle quantità, dovrebbe anche concordare, sempre secondo Walras, con la configurazione di valori di equilibrio delle quantità domandate e prodotte di beni di consumo che può essere ottenuta, per mezzo di opportune sostituzioni nelle funzioni di domanda aggregata dei consumatori-proprietari, dalla "soluzione teorica o matematica" del sistema di equazioni ordinarie che esprimono in maniera formale il modello di scambio e produzione.

In questo modello, tuttavia, la dimostrazione della corrispondenza fra "soluzione teorica" e "soluzione empirica", che come abbiamo visto è di fondamentale importanza per Walras, presenta aspetti ancora più problematici di quelli che abbiamo già evidenziato con riferimento al modello di puro scambio. In effetti, nel modello di scambio e produzione, la "regola walrasiana di

[12] In effetti, dato che ai prezzi di equilibrio i profitti sono nulli in ogni industria, qualunque piano di produzione, o vettore input-output, che rispetti le condizioni tecnologiche è compatibile con la massimizzazione dei profitti.

[13] Questa "regola di aggiustamento delle quantità" è discussa per esteso in (Walras, 1988, pp. 310-330). Nelle pagine citate dell'edizione critica degli *Eléments*, che corrispondono alle Lezioni 41 e 43 della prima edizione e alla Lezione 21 delle successive, si alternano brani delle varie edizioni, anche molto diversi l'uno dall'altro: come vedremo, infatti, la parte relativa al processo di *tâtonnement* nella produzione subisce cambiamenti ripetuti e molto significativi nel corso degli anni. Tuttavia, per quanto riguarda la "regola walrasiana di aggiustamento delle quantità", così come definita nel testo, la posizione di Walras resta immutata nel tempo.

aggiustamento delle quantità" si affianca, senza sostituirla, alla "regola walrasiana di aggiustamento dei prezzi", la sola già presente nel modello di puro scambio: nel modello di scambio e produzione, quindi, convivono due distinti processi di *tâtonnement*, governati da due diverse "regole di aggiustamento" e caratterizzati da due diversi insiemi di variabili di stato[14]. Come abbiamo già rilevato, inoltre, all'interno dello stesso modello coesistono anche due categorie di agenti, rispettivamente i consumatori-proprietari e i produttori, che ubbidiscono a regole di scelta o di comportamento del tutto diverse: mentre i consumatori-proprietari continuano anche in questo modello, come già nel modello di puro scambio, a seguire la regola di scelta basata sulla massimizzazione dell'utilità, i produttori seguono invece una regola di comportamento adattiva, che prescinde dalla massimizzazione del profitto o di qualsiasi altra funzione obiettivo.

La mera necessità di coordinare processi di aggiustamento così diversi rende oltremodo difficile il compito di Walras, che in effetti cade in frequenti contraddizioni in questa parte della sua analisi. Tuttavia ciò che rende improbo il suo tentativo, minandone alla radice la coerenza logica, è la pretesa di far dipendere l'evoluzione temporale delle stesse variabili da scelte o comportamenti di agenti diversi che, come abbiamo visto, ubbidiscono a regole diverse.

Si consideri, in particolare, il processo di aggiustamento delle quantità. Non vi è alcun dubbio che, nelle prime tre edizioni degli *Eléments*, e così pure negli altri scritti del medesimo periodo, Walras ipotizzi che il processo di aggiustamento delle quantità prodotte dei beni di consumo sia un processo che si svolge nel tempo "reale", e cioè nello stesso insieme dei tempi in cui evolve l'"economia di scambio e produzione" investigata, dando luogo ad attività osservabili di produzione e di scambio, in particolare alla trasformazione materiale di servizi dei capitali in beni di consumo prodotti[15]. Questo processo parte da condizioni iniziali arbitrarie, e cioè da quantità arbitrariamente assegnate di beni di consumo, che vengono poi modificate secondo la "regola di aggiustamento" specificata. Ora, data la tecnologia a coefficienti fissi, le quantità iniziali di beni di consumo richiedono, per poter esser prodotte, l'impiego di quantità univocamente determinate di servizi dei capitali (si tratta delle domande condizionate di input generate da un dato vettore di output, cui abbiamo fatto cenno in precedenza); lo stesso vale, naturalmente, per ogni possibile successivo vettore di quantità di beni di consumo da produrre. Ma chi potrebbe fornire in ciascun caso le necessarie quantità di servizi? Nel modello walrasiano di scambio e produzione la risposta non è affatto ovvia, dato che l'offerta di servizi dipende dalle decisioni dei consumatori-proprietari, che continuano a comportarsi in maniera concorrenziale; pertanto, dato il sistema dei prezzi, le scelte dei consumatori-proprietari determinano l'offerta aggregata di servizi, che è in generale incompatibile con la domanda condizionata degli stessi proveniente dalle varie industrie. Sembra dunque che il processo di aggiustamento delle quantità si inceppi prima ancora di potersi avviare.

Fin dalla pubblicazione del terzo *mémoire* sulla teoria della produzione (1876), subito dopo incorporato nel secondo volume della prima edizione degli *Eléments* (1877), Walras è consapevole dell'esistenza di questo grave problema, al quale cerca di porre rimedio mediante un artificio: egli immagina che, ai prezzi dati, le domande condizionate di servizi provenienti dai produttori "nazionali" siano comunque soddisfatte dai proprietari di tali servizi operanti su un "mercato straniero" ("un marché étranger"), che si fanno anche carico di acquistare le quantità di beni di consumo prodotte dai produttori "nazionali" (Walras, 1988, pp. 312 e seguenti, **1**). Tuttavia questa soluzione artificiale non è per nulla soddisfacente, in quanto contraddice non solo l'ipotesi di scambio volontario, ma la stessa clausola *quid pro quo* sulla quale si fonda tutta la teoria moderna

[14] Per quanto riguarda il processo dinamico governato dalla "regola di aggiustamento delle quantità", le variabili di stato sono sempre rappresentate, lungo tutto l'arco temporale che qui ci interessa, dalle quantità prodotte di beni di consumo. Walras mostra invece qualche incertezza per quanto riguarda la natura delle variabili di stato del processo dinamico governato dalla "regola di aggiustamento dei prezzi": infatti, oltre ai prezzi dei servizi, che svolgono sempre questa funzione in tutte le versioni della teoria, egli annovera talvolta tra le variabili di stato di questo processo (o di qualche suo sottoprocesso) anche i prezzi dei beni di consumo (si veda, in particolare, Walras 1988, pp. 702-703, **3-4**).

[15] Si vedano, in particolare, i passi con i quali inizia l'analisi del *tâtonnement* nella produzione sia nella prima edizione degli *Eléments* (Walras, 1988, p. 312, **1**), sia nelle due edizioni successive (Walras, 1988, pp. 308, 312, **2-3**). Su questi passi ritorneremo più estesamente fra breve.

dello scambio; in realtà, facendo ricorso a un *deus ex machina* esterno al modello, essa finisce addirittura per entrare in contrasto con i fondamenti stessi della teoria dell'equilibrio generale, una teoria che, com'è noto, si propone di spiegare endogenamente i fatti economici come risultato dell'interazione sul mercato fra agenti interni al modello.

La consapevolezza di questi limiti induce infine Walras a sbarazzarsi della soluzione basata sul "mercato straniero": a partire dalla seconda edizione degli *Eléments* (1889), infatti, Walras adotta una nuova soluzione, che mantiene poi inalterata anche nella terza edizione. Le ragioni metodologiche sottostanti alla soluzione proposta sono enunciate da Walras in un celebre brano, oggetto di numerose controversie interpretative, che ora intendiamo commentare.

Innanzitutto Walras ribadisce l'esigenza che, anche nei modelli con produzione, sia preservata quella stessa ipotesi di invarianza dei dati nel corso del processo di aggiustamento all'equilibrio che egli aveva già posto al centro della propria analisi del *tâtonnement* nel modello di puro scambio:

> Il s'agit d'arriver à l'équilibre de la production de la même façon que nous sommes arrivés à l'équilibre de l'échange, c'est-à-dire en supposant les données du problème invariables pendant tout le temps que dureront nos *tâtonnements*, sauf à supposer ensuite ces données variables en vue d'étudier les effets de leurs variations. (Walras, 1988, p. 308, **2-3**)

Tuttavia l'approccio non può essere esattamente lo stesso nei due casi, dato che esiste un'importante differenza fra il processo di *tâtonnement* nella produzione e quello nello scambio, differenza che sarebbe sbagliato trascurare:

> Mais le *tâtonnement* en matière de production rencontre une complication qui n'existait pas en matière d'échange. Dans l'échange, il n'y a pas de modification des marchandises. Un prix étant crié, et la demande et l'offre effective correspondant à ce prix n'étant pas égales, on crie un autre prix auquel correspondent une autre demande et une autre offre effectives. Dans la production il y a transformation des services producteurs en produits. Certain prix des services étant criés, et certain quantités de produits étant fabriquées, si ces prix et ces quantités ne sont pas prix et quantités d'équilibre, il faudra non seulement crier d'autres prix, mais fabriquer d'autres quantités de produits. (Walras, 1988, p. 308, **2-4**)

Questo passo, che rimarrà inalterato anche nella quarta edizione degli *Eléments*, è stato spesso interpretato in maniera erronea, in particolare da Patinkin (1955, pp. 378-380). Per comprenderne appieno il significato, è necessario ricordare che, già dal 1885 e comunque nella seconda edizione degli *Eléments* (1889), Walras adotta definitivamente l'idea che, nel processo di *tâtonnement* che caratterizza il modello di puro scambio, non possano aver luogo transazioni effettive quando si è fuori dall'equilibrio, né possano verificarsi in tali circostanze eventi naturali o fatti economici in grado di alterare i dati del modello: in effetti, come Walras stesso chiarisce nel passo sopra riportato, tutto ciò che accade in disequilibrio è che vengono annunciati nuovi prezzi e, conseguentemente, vengono formulati nuovi piani di azione (che peraltro non si traducono in azioni). Ma quando si considera la produzione la situazione si rivela del tutto diversa: in questo caso, secondo Walras, durante il processo di *tâtonnement* si effettuano azioni reali e si verificano trasformazioni fisiche che danno luogo a esiti osservabili. Di questa differenza bisogna tener conto, come testimonia il passo successivo:

> Acceptant cette nécessité, nous devons supposer que, pour chaque reprise du tâtonnement, nos entrepreneurs trouveront, dans le pays, des propriétaires fonciers, travailleurs et capitalistes possédant les mêmes quantités de services et ayant le mêmes besoins des services et des produits. (Walras, 1988, p. 308, **2-3**)

Come si intuisce facilmente, le nuove ipotesi introdotte da Walras mirano in realtà a risolvere in un colpo solo due distinti problemi. In primo luogo Walras vuole sbarazzarsi dell'insostenibile *deus ex machina* della prima edizione (il "mercato straniero" accomodante); per questa ragione, egli accetta di "chiudere" il proprio modello, concentrando l'attenzione in maniera esclusiva sull'economia "nazionale" ("le pays"), come avrebbe peraltro dovuto fare fin dall'inizio. In secondo luogo, tuttavia, Walras deve preoccuparsi di un'altra fondamentale esigenza: infatti, poiché egli continua a supporre, come aveva fatto in precedenza, che durante il processo di *tâtonnement* nella produzione si verifichino fatti reali ed eventi osservabili, ma non può più contare sul "mercato straniero" per aggiustare le cose, egli deve trovare un nuovo modo per garantire che i dati del modello rimangano inalterati. A questo scopo Walras assume che l'"economia di scambio e produzione" investigata sia stazionaria, e cioè che si ripeta invariata di periodo in periodo, almeno per quanto riguarda i dati che la caratterizzano. In questo caso, pertanto, la ben nota esigenza, più volte sottolineata da Walras fin dai suoi primi scritti, che i dati del modello rimangano inalterati durante il processo di *tâtonnement* viene soddisfatta mediante la nuova ipotesi secondo la quale i dati della stessa economia studiata dal modello rimangono invariati nel tempo "reale", e cioè nello stesso insieme dei tempi lungo il quale l'economia evolve; questo implica, naturalmente, che un "periodo" nella storia dell'economia venga a coincidere con uno "stadio" del processo di *tâtonnement* considerato.

Nel caso dell'"economia di scambio e produzione" di cui ci stiamo qui occupando, l'ipotesi di stazionarietà dell'economia è legittima, dal momento che i dati sono tutti rappresentati da variabili, funzioni, o relazioni esogene, e non possono quindi subire alcuna modificazione per effetto di ciò che può verificarsi nell'economia, tanto in equilibrio quanto in disequilibrio. Da un lato, infatti, le funzioni di utilità e la tecnologia sono esogene per ipotesi; pertanto, se così si desidera, si può legittimamente assumere che non si modifichino nel tempo "reale". Dall'altro, solo due tipi di merci possono essere oggetto di attività economica nell'"economia di scambio e produzione": i beni di consumo non-durevoli e i servizi dei capitali. Le merci di entrambi i tipi hanno la natura di grandezze-flusso, che non possono essere immagazzinate e non sopravvivono al loro primo uso ("revenus", nel linguaggio di Walras); un'economia con queste caratteristiche può dunque essere convenientemente denominata "economia di puri flussi". Ma poiché nessun tipo di attività economica è in grado di modificare endogenamente i dati di un'"economia di puri flussi", è legittimo in questo caso ipotizzare che i dati siano invarianti nel tempo.

Mentre l'ipotesi di stazionarietà dell'economia, nel senso specificato, risolve i due problemi menzionati sopra, questa ipotesi non può ovviamente risolvere tutti gli altri problemi che affliggono il processo di *tâtonnement* nella produzione. In particolare, a ciascuna ripresa ("reprise") del processo, la stessa difficoltà che già si presentava nell'economia "aperta" della prima edizione degli *Eléments* si ripresenta immediatamente anche nell'"economia di puri flussi", "chiusa" e stazionaria della seconda e terza edizione. Anche qui, infatti, si ripropone lo stesso interrogativo: chi mai si prenderà cura di colmare il divario, inevitabile in disequilibrio, fra le quantità di servizi richieste dai produttori e le quantità che i proprietari "nazionali" sono disposti a offrire? In un certo senso la situazione è persino peggiore in questo caso, dato che, in assenza del "mercato straniero" della prima edizione, non c'è più alcun agente esterno che sia disposto farsi carico del necessario accomodamento; dunque l'onere dell'aggiustamento ricade necessariamente su qualche agente interno all'economia contemplata dal modello. Nel modello di scambio e produzione, tuttavia, l'ipotesi di volontarietà degli scambi continua a valere per i consumatori-proprietari, e quindi per tutti gli agenti che operano sullo stesso lato di un mercato (il lato dell'offerta del mercato dei servizi). Com'è dunque possibile sviluppare una teoria coerente dei comportamenti osservabili in disequilibrio in un contesto nel quale nessuno fra gli agenti che operano sullo stesso lato di un mercato può essere forzato a fare qualcosa di diverso da ciò che desidera fare?

Come si vede, le nuove ipotesi circa il processo di *tâtonnement* nella produzione introdotte da Walras a partire dalla seconda edizione degli *Eléments* non gli consentono di fare reali progressi né per quanto riguarda l'analisi del disequilibrio, né per quanto riguarda l'auspicata dimostrazione

della coincidenza fra "soluzione empirica" e "soluzione teorica" nel modello di scambio e produzione. Contrariamente alle aspettative di Walras, pertanto, le nuove ipotesi non sono sufficienti a garantire un'accettabile soluzione dei gravi problemi lasciati aperti alla prima edizione. Paradossalmente, tuttavia, esse si rivelano decisive nel determinare un'evoluzione forse inattesa della teoria walrasiana, riguardante l'interpretazione del concetto di equilibrio.

In effetti, poiché il processo di *tâtonnement* nella produzione si sviluppa nello stesso tempo "reale" lungo il quale evolve l'"economia di scambio e produzione", e poiché i dati dell'economia non si modificano durante il processo, né per cause esogene né per cause endogene, il tipo di equilibrio al quale il processo di aggiustamento auspicabilmente converge può essere qualificato come un equilibrio "stazionario", e cioè come un equilibrio che si riferisce all'intera successione (potenzialmente infinita) di istanti di tempo "reale" in ciascuno dei quali è possibile osservare gli stessi dati invarianti da cui l'equilibrio stesso dipende. L'ipotesi di stazionarietà dell'economia, introdotta da Walras nella seconda edizione degli *Eléments* e confermata nella terza per ragioni connesse all'analisi del processo di *tâtonnement* nella produzione, finisce quindi per avvalorare l'interpretazione del modello walrasiano di scambio e produzione come un modello di equilibrio stazionario[16].

Il modello di scambio e produzione, tuttavia, non è l'unico modello in cui Walras affronta i problemi posti dall'esistenza di attività produttive: come abbiamo sopra ricordato, infatti, fin dal 1877 Walras elabora un altro modello con produzione, e precisamente il modello con formazione di capitale. Dal punto di vista di Walras, la produzione di beni capitali solleva problemi simili a quelli posti dalla produzione di beni di consumo. E' quindi del tutto naturale che, nella seconda edizione degli *Eléments*, Walras riesamini il problema del *tâtonnement* nella produzione di beni capitali seguendo la stessa impostazione da lui seguita nell'analizzare il processo di *tâtonnement* nella produzione di beni di consumo.

In effetti, se si esaminano i passi della seconda edizione degli *Eléments* in cui Walras discute il processo di aggiustamento all'equilibrio nel modello con formazione di capitale, si trovano espressioni quasi identiche a quelle che abbiamo già commentato sopra con riferimento al modello di scambio e produzione: anche in questo caso, infatti, dopo aver ricordato che la produzione di beni capitali nuovi, al pari della produzione di beni di consumo, comporta l'esecuzione di attività osservabili in disequilibrio, Walras introduce un'ipotesi di stazionarietà dell'economia, analoga a quella introdotta nel caso del modello di scambio e produzione; questa ipotesi ha lo scopo di preservare l'invarianza dei dati nel corso del processo di *tâtonnement*, che anche in questo caso, come già nel modello di scambio e produzione, si svolge apparentemente nel tempo "reale" (Walras, 1988, p. 376, **2-3**; p. 377, **2-4**).

Nel modello con formazione di capitale, tuttavia, si pone un problema logico che non si poneva nel modello di scambio e produzione: in quest'ultimo modello, infatti, l'ipotesi di invarianza dei dati nel tempo "reale" era logicamente difendibile, in quanto l'economia ivi discussa era un'"economia di puri flussi", nella quale i dati non sono influenzati da attività endogene; nel modello con formazione di capitale, invece, l'ipotesi di invarianza dei dati nel tempo "reale" è logicamente incoerente, dato che un'economia con formazione di capitale non è un'"economia di puri flussi", ma un'economia in cui sono presenti sia grandezze-flusso sia grandezze-stock (per l'appunto, i beni capitali prodotti) e nella quale la produzione di beni capitali è un'attività endogena capace di modificare i dati dell'economia. Naturalmente, se nel modello con formazione di capitale l'ipotesi di invarianza dei dati nel tempo "reale" non è più difendibile sul piano logico, diviene indifendibile per le stesse ragioni anche l'interpretazione stazionaria del concetto di equilibrio, che a tale ipotesi è strettamente associata.

[16] Questa interpretazione del concetto di equilibrio walrasiano, tacitamente o esplicitamente accolta da molti economisti nei primi decenni del Ventesimo secolo, sarà infine resa popolare da Cassel mediante la sua riformulazione semplificata del modello di scambio e produzione di Walras (Cassel, 1932, Cap. 4).

7. I modelli con produzione e la svolta del 1900

Dopo la pubblicazione della terza edizione degli *Eléments* (1896), pressoché identica alla seconda (1889) per gli aspetti che qui ci interessano, la teoria walrasiana dell'equilibrio e del *tâtonnement* si trova ancora in uno stato insoddisfacente: persistono infatti numerose incoerenze epistemologiche e teoriche, che in qualche caso danno luogo a veri e propri errori analitici. Fra le incoerenze epistemologiche, la più evidente è rivelata dal carattere dualistico del sistema teorico walrasiano: nelle versioni di questo sistema formulate nella seconda e terza edizione degli *Eléments*, infatti, è possibile trovare, l'una a fianco dell'altra, due interpretazioni alternative del *tâtonnement*, quella virtuale e quella effettiva; questi due tipi di processi si sviluppano in due distinti insiemi dei tempi, quello "logico" e quello "reale", conducono a due nozioni alternative di equilibrio, quella "istantanea" e quella "stazionaria", e si applicano infine a modelli differenti, il modello di puro scambio, da un lato, e i modelli con produzione, dall'altro[17]. Fra le incoerenze analitiche, le più serie sono probabilmente quelle evidenziate dalle due circostanze seguenti: in primo luogo, risulta impossibile avviare e far proseguire regolarmente i processi di *tâtonnement* nei modelli con produzione, dato che è impossibile costringere a compiere azioni non desiderate gli agenti economici di una certa classe (quella dei consumatori-proprietari) cui si riconosce il diritto di agire nel rispetto della condizione di scambio volontario; in secondo luogo, nel modello con formazione di capitale è logicamente contraddittorio assumere che i dati siano invarianti nel tempo "reale", ovvero supporre che l'economia sia stazionaria.

Tutti questi problemi sembrano derivare dal tentativo di preservare un certo grado di realismo nell'analisi dei processi di *tâtonnement* riguardanti la produzione, tentativo che Walras continua ostinatamente a compiere nella seconda e terza edizione degli *Eléments*, avendo in realtà già da tempo abbandonato ogni pretesa di realismo nell'analisi del processo di *tâtonnement* nello scambio. Per "realistica" intendiamo qui un'analisi del processo di *tâtonnement* che cerchi di modellarlo come un processo che si sviluppa nel tempo "reale", che prevede comportamenti effettivi e osservabili in disequilibrio, e che è in grado di influire realmente sul sentiero temporale seguito dall'economia. Vi sono buone ragioni per ritenere che questa sia l'idea di analisi "realistica" che corrisponde appieno alle aspirazioni di Walras. Tuttavia, date queste premesse, anche mettendo da parte tutte le incoerenze sopra richiamate, e limitandoci a considerare gli aspetti meno controversi della teoria walrasiana, siamo comunque costretti a concludere che i molteplici sforzi compiuti dallo stesso Walras in direzione di un'analisi realistica non sono affatto coronati da successo.

Si consideri, in particolare, il modello di scambio e produzione, nel quale almeno l'ipotesi di stazionarietà dell'economia non è logicamente incoerente. Si vede subito che neppure in questo caso Walras è in grado di formulare una vera e propria teoria dei comportamenti osservabili in disequilibrio. In effetti, ciò che ci viene suggerito dall'approccio walrasiano è che tali comportamenti possono effettivamente manifestarsi durante il processo di *tâtonnement*; ma non ci viene proposta alcuna teoria mediante la quale i comportamenti in questione possano essere predetti. Bisogna però anche aggiungere che, se pure questi comportamenti fossero predicibili, ogni sforzo mirante a predirli sarebbe privo di reali giustificazioni: come abbiamo visto, infatti, i comportamenti in disequilibrio, non potendo influire sui dati dell'economia, sarebbero necessariamente privi di effetti persistenti (se si prescinde dall'auspicata, ma indimostrata, convergenza all'equilibrio stazionario che il processo di *tâtonnement* dovrebbe realizzare); pertanto non ci sarebbe alcun motivo valido per cercare di predirli.

Come si vede, i dubbi guadagni in termini di realismo non sono certo sufficienti per compensare le serie perdite in termini di coerenza causate dalla sopravvivenza di un'interpretazione dei processi

[17] In realtà la situazione è ancora più complicata, dato che i modelli con produzione sviluppati nella seconda e terza edizione, e cioè il modello di scambio e produzione e il modello con formazione del capitale, contengono entrambi al proprio interno uno o più sotto-modelli di puro scambio che obbediscono a una regola di aggiustamento ed esibiscono un processo di *tâtonnement* del tutto diversi dalla regola e dal processo che caratterizzano i più ampi modelli che li contengono.

di *tâtonnement* nella produzione come processi in tempo "reale". Così, quando Walras, in vista della pubblicazione della quarta edizione degli *Eléments*, compie uno sforzo conclusivo per risistemare la teoria del *tâtonnement*, la strada che si trova di fronte è di fatto obbligata: egli deve semplicemente rinunciare a ogni pretesa di realismo nell'analisi dei processi di *tâtonnement* riguardanti la produzione. Questo è ciò che Walras adottando la cosiddetta "hypothèse des *bons*", discussa in tre differenti luoghi della quarta edizione degli *Eléments*: nella Lezione 20, "Equations de la production"; nella Lezione 24, "Equations de la capitalisation et du crédit"; e, infine, nella Lezione 29, "Equations de la circulation et de la monnaie". Nelle prime due Lezioni Walras corregge la sua precedente trattazione del *tâtonnement* nella produzione di beni di consumo e di beni capitali; nell'ultima, che è una delle poche parti completamente nuove degli *Eléments*, Walras espone in maniera sistematica il suo punto di vista conclusivo per quanto riguarda la statica, la dinamica, il *tâtonnement* e l'equilibrio.

L'"hypothèse des *bons*" è introdotta per la prima volta verso la fine della Leçon 20, immediatamente dopo il passo, conservato senza variazioni dalla seconda edizione e già citato nel paragrafo precedente, in cui Walras contrappone il *tâtonnement* nello scambio, dove tutto ciò che si richiede è una mera variazione dei prezzi, al *tâtonnement* nella produzione, dove invece lo svolgimento del processo comporta una trasformazione effettiva di servizi in beni di consumo. Come si ricorderà, questa differenza fa insorgere, secondo Walras, una particolare difficoltà che è specifica del *tâtonnement* nella produzione. Come abbiamo visto sopra, nella seconda edizione degli *Eléments* Walras si prende cura di questa difficoltà introducendo un'ipotesi di stazionarietà dei dati dell'economia, cui è associata l'ipotesi che il processo di *tâtonnement* si svolga nel tempo "reale". Nella quarta edizione il passo contenente l'ipotesi di stazionarietà dei dati è integralmente sostituito dal passo seguente, che introduce un'ipotesi alternativa, e precisamente l'"hypothèse des *bons*":

> Pour réaliser un tâtonnement rigoureux en matière de production comme en matière d'échange, tout en tenant compte de cette circonstance, il n'y a qu'à supposer les entrepreneurs représentant par des bons des quantités successives de produits déterminées d'abord au hasard puis en augmentation ou diminution suivant qu'il y aura excédent du prix de vente sur le prix de revient ou réciproquement, jusqu'à égalité de ces deux prix; et les propriétaires fonciers, travailleurs et capitalistes représentant de même par des bons des quantités successives de services à des prix criés d'abord au hasard puis en hausse ou baisse suivant qu'il y aura excédent de la demande sur l'offre ou réciproquement, jusqu'à égalité de l'une et de l'autre. (Walras, 1988, p. 309, **4**)[18]

Anche se il passo sopra citato non soddisfa alcuni ovvi canoni di rigore e completezza, a causa di qualche imprecisione e dimenticanza di Walras, il suo significato generale è perfettamente chiaro: lo scopo dell'"hypothèse des *bons*" è semplicemente quello di trasformare un processo effettivo che ammette disequilibrio osservabile in tempo "reale", e cioè il *tâtonnement* nella produzione della seconda e terza edizione degli *Eléments*, in un processo virtuale che ammette solo disequilibrio inosservabile in tempo "logico", qual è in effetti il nuovo *tâtonnement* nella produzione della quarta edizione. Nelle precedenti edizioni, come abbiamo visto, il carattere virtuale del *tâtonnement* nello scambio coesisteva con il carattere effettivo del *tâtonnement* nella produzione, tanto di beni di consumo quanto di beni capitali; nella quarta edizione, invece, per effetto dell'"hypothèse des *bons*", che si applica specificamente ai processi di *tâtonnement* riguardanti la produzione di beni di consumo e di beni capitali, tutti i processi di *tâtonnement*

[18] Nella quarta edizione degli *Eléments* si può trovare un passo molto simile verso la fine della Leçon 24, dove viene introdotta l'"hypothèse des bons" con riferimento alla produzione di beni capitali nuovi (Walras, 1988, 377, **4**). Anche in questo caso il passo in esame sostituisce un passo risalente alla seconda edizione, cui abbiamo fatto riferimento alla fine del paragrafo precedente, nel quale Walras aveva introdotto l'ipotesi di stazionarietà, e quindi di un processo di *tâtonnement* in tempo "reale", per prendersi cura della presunta difficoltà particolare concernente il processo di *tâtonnement* nella produzione di beni capitali nuovi.

contemplati dalla teoria vengono ad assumere la stessa natura virtuale che già caratterizzava il *tâtonnement* nello scambio fin dalla seconda edizione.

Col generalizzare all'intera economia l'idea di un *tâtonnement* puramente virtuale in tempo "logico", l'"hypothèse des *bons*" semplifica e chiarisce la struttura temporale dell'analisi walrasiana, favorendo anche un'interpretazione univoca della nozione di equilibrio impiegata nei vari modelli che compongono la teoria. Queste implicazioni metodologiche dell'"hypothèse des *bons*" sono enunciate in maniera singolarmente lucida e compatta in un passo ben noto, scritto *ex novo* da Walras e contenuto nella Leçon 29 della quarta edizione degli *Eléments*:

> Au moyen de l'hypothèse des bons, on peut distinguer nettement, surtout si l'on les suppose successives, les trois phases suivantes:
> 1° La phase des tâtonnements préliminaires en vue de l'établissement de l'équilibre en principe;
> 2° La phase statique de l'établissement effectif ab ovo de l'équilibre relatif à la livraison des services producteurs et des produits pendant la période de temps considérée, aux conditions convenues, sans changements dans les données du problème;
> 3° Une phase dynamique de trouble continuel de l'équilibre par des changements dans ces données et de rétablissement continuel de l'équilibre ainsi troublé.
> En conséquence de ces définitions, il doit être bien entendu que les capitaux neufs, fixes ou circulants, qui seront livrés pendant la seconde phase [...], ne fonctionneront que dans la troisième phase, constituant ainsi un premier changement dans les données du problème. (Walras, 1988, pp. 447, 449, **4**)

La struttura temporale dell'analisi di Walras emerge in maniera chiara dal passo sopra citato, che elimina ogni possibile dubbio circa la natura dell'economia che Walras intende sottoporre a indagine teorica. In linguaggio moderno, l'economia che Walras intende investigare è un'economia concorrenziale sequenziale, cioè un'economia nella quale i mercati sia aprono sequenzialmente nel tempo e gli agenti economici compiono le proprie scelte in ogni istante in cui i mercati sono aperti.

Più precisamente, l'economia contemplata da Walras evolve lungo una successione di intervalli temporali non-degeneri di ugual lunghezza, connessi a coppie, che coprono l'intera retta reale e che possono essere denominati "date". La lunghezza temporale di ciascuna data è arbitraria, ma per fissare le idee può essere conveniente, seguendo Walras (1988, p. 577, **4**), supporre che ciascuna data duri un anno. Sia t l'istante iniziale della data corrispondente. Possiamo allora porre $t \in \mathbb{Z}$, dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme degli interi. A ciascun istante $t \in \mathbb{Z}$ corrisponde l'intervallo semi-aperto $[t,t+1)$, che può essere identificato con la data t. Ciascun istante $t \in \mathbb{Z}$ è caratterizzato da una certa configurazione di dati, che rimane invariata per tutta la data t.

Nell'istante iniziale di ciascuna data t si svolge un processo di *tâtonnement* virtuale, che consente all'economia di raggiungere istantaneamente l'equilibrio corrispondente ai dati prevalenti all'istante t. Coll'uso dell'espressione "*tâtonnements* préliminaires" Walras intende chiarire che il processo di *tâtonnement* qui ipotizzato si sviluppa in un tempo "logico" e richiede solo un istante di tempo "reale" per realizzare compiutamente i propri effetti. L'equilibrio sorretto da un simile processo di aggiustamento virtuale in tempo "logico" è necessariamente "istantaneo"; più precisamente, dato che l'economia investigata è un'economia sequenziale, ogni equilibrio "istantaneo" associato all'istante iniziale di una particolare data assume la natura di un equilibrio "temporaneo", nel senso che sarà in seguito proposto e diffuso nella professione economica da Hicks (1939).

L'evoluzione temporale dell'economia può quindi essere descritta per mezzo di una successione cronologicamente ordinata di equilibri "temporanei". Walras (1988, p. 447) denota questa procedura descrittiva con l'espressione "équilibre variable ou mobile". Nessuna ipotesi di stazionarietà dei dati, e neppure, com'è ovvio, della successione di equilibri "temporanei", è

necessaria o logicamente possibile in questo contesto teorico; e, in effetti, nessuna ipotesi di questo genere viene formulata da Walras.

In questo contesto non è neppure necessario imporre alcuna specifica limitazione per quanto riguarda la natura delle merci che possono essere scambiate o prodotte nell'economia: in particolare, tanto gli stock quanto i flussi possono essere oggetto di attività economica. Nell'istante iniziale di ogni data t, dati i prezzi di equilibrio istantaneamente raggiunti in t per mezzo dei "*tâtonnements* préliminaires" in tempo "logico", gli agenti scelgono in maniera ottimale i loro piani di azione di equilibrio (piani di scambio, consumo e produzione) che essendo mutuamente compatibili, possono essere tutti realizzati. Secondo Walras, la "fase statica", che abbraccia l'intera data, consiste precisamente nell'esecuzione dei piani di azione di equilibrio ottimamente scelti nell'istante iniziale della data in questione. Le quantità di beni di consumo non durevoli e di servizi, entrambi grandezze-flusso, la cui consegna è prevista dai piani di equilibrio, sono effettivamente consegnate e usate per l'intera durata della data. Le quantità dei beni capitali di nuova produzione, invece, possono anche essere consegnate in qualche istante dell'intervallo temporale incluso nella data, ma non possono essere usate fino all'istante iniziale della data successiva: queste quantità, che rappresentano grandezze-stock, costituiscono la prima fonte endogena di cambiamento dei dati dell'economia. Secondo Walras, la "fase dinamica" consiste precisamente nel cambiamento dei dati, che si suppone abbia luogo nell'istante iniziale di ciascuna data. Quindi la "fase dinamica" è non meno istantanea della "fase dei *tâtonnements* preliminari": a dire il vero, da un punto di vista temporale, anche se non da un punto di vista logico, le due fasi necessariamente coincidono, sovrapponendosi inevitabilmente nell'istante iniziale di ciascuna data.

Questa costruzione, per quanto artificiosa e forzata, è tuttavia in grado di dare risposta a tutti i problemi analitici lasciati irrisolti dalle precedenti edizioni degli *Eléments*: in particolare, dato che non è più consentito compiere azioni di alcun genere in disequilibrio, non è nemmeno necessario costringere qualche agente a compiere azioni indesiderate fuori dall'equilibrio; inoltre, dato che non c'è più motivo di introdurre alcuna ipotesi di stazionarietà, non c'è nemmeno ragione di minare con ipotesi contraddittorie la coerenza del modello di formazione del capitale. Anche i problemi epistemologici che affliggevano la teoria walrasiana nelle precedenti edizioni degli *Eléments* vengono in parte risolti dalla svolta metodologica e teorica attuata da Walras nella quarta edizione: in particolare, poiché nella quarta edizione sopravvive soltanto la nozione di equilibrio "istantaneo", viene a cadere la disturbante coesistenza fra le nozioni di equilibrio "istantaneo" e "stazionario", che aveva caratterizzato i modelli con produzione nelle precedenti edizioni.

8. Conclusioni

Nei paragrafi precedenti abbiamo ricostruito le varie tappe e gli intricati snodi che hanno caratterizzato l'evoluzione storica del pensiero di Walras in tema di equilibrio, disequilibrio e tempo nell'ultimo quarto dell'Ottocento. La ricostruzione proposta mostra quanto sia stato difficile per questo economista liberare la propria analisi dai vincoli inizialmente impostigli da una visione preanalitica improntata a un forte e quasi ingenuo realismo descrittivo, almeno per quanto riguarda la rappresentazione del meccanismo di aggiustamento concorrenziale. Walras intuisce molto presto, anche se in maniera confusa, le difficoltà teoriche, analitiche ed epistemologiche che si annidano nella sua analisi dei processi di *tâtonnement* associati ai vari modelli di equilibrio, ma esita ad accogliere soluzioni radicali per timore di dover rinunciare alle pretese giustificazioni realistiche della teoria.

Per quanto riguarda il modello di puro scambio, Walras si piega abbastanza presto alle esigenze dell'analisi, accogliendo l'ipotesi di "assenza di scambi fuori dall'equilibrio" e l'associata interpretazione del *tâtonnement* nello scambio come processo virtuale, ma lo fa a malincuore, solo perché questo è l'unico modo per mettere a tacere le velenose critiche provenienti da Bertrand e da altri. Per quanto riguarda invece i modelli con produzione, che sfuggono apparentemente alle critiche esterne (forse perché ignorati o non compresi dai pochi lettori non favorevoli all'approccio

walrasiano), Walras oppone una strenua resistenza all'abbandono delle ipotesi pseudo-realistiche che permeano la sua analisi dei processi di *tâtonnement* nella produzione. L'aspetto paradossale di questa battaglia di retroguardia, che logora Walras per più di un ventennio, sta nel fatto che i guadagni in termini di realismo descrittivo e di capacità predittiva, assicurati dalle fantasiose ipotesi accolte nelle prime tre edizioni degli *Eléments* (si pensi, in particolare, all'ipotesi del "mercato straniero" o a quella di invarianza dei dati nel tempo "reale"), sono in verità molto modesti; cosicché alla fine, quando Walras si decide a sbarazzarsi delle residue sopravvivenze delle precedenti interpretazioni stazionarie del *tâtonnement* e dell'equilibrio, facendo finalmente propria l'irrealistica "hypothèse des *bons*", le paventate perdite in termini di realismo descrittivo si rivelano quasi del tutto insignificanti.

Non irrilevante, invece, è il costo metodologico associato all'idea di un processo di *tâtonnement* "istantaneo". Questa idea riflette semplicemente la coesistenza, nel sistema teorico walrasiano, di due distinti concetti di tempo: il tempo "logico" del processo di *tâtonnement* virtuale e il tempo "reale" del processo economico effettivo. Naturalmente, l'idea stessa di un "processo istantaneo" è molto difficile da accettare, in quanto può legittimamente apparire come una vera e propria contraddizione in termini. Tuttavia, alla fine del suo lungo e tortuoso percorso scientifico, Walras si dimostra infine disposto ad accettarla. Questo passo conclusivo è probabilmente dovuto non solo all'esigenza di uscire da un groviglio di difficoltà ormai inestricabile, ma forse anche al fatto che Walras riesce alla fine a scovare una giustificazione di stampo realistico persino per un'idea a prima vista così lontana dalla realtà come quella di "processo istantaneo": in effetti, se i mercati concorrenziali fossero davvero così veloci e affidabili da raggiungere la "soluzione pratica o empirica" del problema della determinazione dell'equilibrio "en quelques minutes", come Walras (1988, p. 93) mostra di ritenere, allora il supporre che il processo di aggiustamento all'equilibrio sia "istantaneo" non dovrebbe più apparire come un'insopportabile deformazione di ciò che accade nel mondo reale.

Riferimenti bibliografici

Bertrand, Joseph. 1883. "Théorie mathématique de la richesse sociale, par Léon Walras, professeur d'économie politique à l'académie de Lausanne", Lausanne, 1883. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de richesses*, par Augustin Cournot, Paris, 1838, *Journal des Savants*, septembre, 504-8; come ristampato in Bridel (1996), 195-202.

Bridel, Pascal. 1996. *Le chêne et l'architecte. Un siècle de comptes rendus bibliographiques des Eléments d'économie politique pure de Léon Walras*, Librairie Droz, Genève - Paris.

Cassel, Gustav. 1932. *The Theory of Social Economy*, Harcourt, New York.

Donzelli, Franco. 2005. "Equilibrium and *Tâtonnement* in Walras' *Eléments*" (July 2005). *UNIMI - Research Papers in Economics, Business, and Statistics. Economics.* Working Paper 5. http://services.bepress.com/unimi/economics/art5

Goodwin, Richard M. 1951. "Iteration, Automatic Computers and Economic Dynamics", *Metroeconomica*, 3, 1-7.

—— 1953. "Static and Dynamic Linear General Equilibrium Models", in *Input-Output relations: Proceedings of a Conference on Inter-Industrial Relations*, Held at Driebergen, Holland, edited by The Netherlands Economic Institute, Stenferd Kroese, Leyden.

Hicks, John R. 1934. "Léon Walras", *Econometrica*, 2, October, 338-48.

—— 1939. *Value and Capital. An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford University Press, Oxford.

—— 1976. "Some Questions of Time in Economics", in Anthony M. Tang, Fred M. Westfield, and James S. Worley (eds), *Evolution, Welfare and Time in Economics. Essays in Honor of Nicholas Georgescu-Roegen*, D.C. Heath, Lexington, Mass. and Toronto, 135-151.

Jaffé, William. 1954. "Translator's Notes", in Léon Walras (1954), 497-558.

—— 1965. *Correspondence of Léon Walras and Related Papers*, 3 vols., edited by William Jaffé, North-Holland, Amsterdam.
—— 1967. "Walras's Theory of Tâtonnement: A Critique of Recent Interpretations", *Journal of Political Economy*, 75, 1, February, 1-19.
—— 1980. "Walras's Economics as Others See It", *Journal of Economic Literature*, 18, June, 528-49.
—— 1981. "Another Look at Léon Walras's Theory of Tâtonnement", *History of Political Economy*, 13, Summer, 1981, 313-36.
Newman, Peter. 1965. *The Theory of Exchange*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey.
Patinkin, Don. 1956. *Money, Interest and Prices: An Integration of Monetary and Value Theory*, Row, Peterson, Evanston, Ill.
—— 1965. *Money, Interest and Prices: An Integration of Monetary and Value Theory*, Second Edition, Harper and Row, New York.
Walker, Donald A. 1972. "Competitive Theories of Tatonnement", *Kyklos*, 25, 345-63.
—— 1987a. "Edgeworth versus Walras on the Theory of Tatonnement", *Eastern Economic Journal*, 13, 2, April - June.
—— 1987b. "Walras's Theories of Tatonnement", *Journal of Political Economy*, 95, 4, 758-74.
—— 1996. *Walras's Market Models*, Cambridge University Press, Cambridge.
Walras, Léon. 1874. "Principe d'une théorie mathématique de l'échange", *Séances et travaux de l'Académie des sciences morales et politiques (Institut de France)*, Collection, 33^{e} année, nouvelle série, 101, tome I, Paris, Alphonse Picard, janvier, 97-116.
—— 1876a. "Equations de l'éxchange", Bulletin *de la Société vaudoise des sciences naturelles*, 2^{e} série, 14, no. 76, octobre, 365-94.
—— 1876b. "Equations de la production", *Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles*, 2^{e} série, 14, no. 76, octobre, 395-430.
—— 1877a. "Equations de la capitalisation", *Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles*, 2^{e} série, 15, no. 77, mars.
—— 1877b. *Théorie mathématique de la richesse sociale. Quatre Mémoires lus à l'Académie des sciences morales et politiques, à Paris, et à la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, à Lausanne*, Guillaumin, Paris.
—— 1880. "La bourse, la spéculation et l'agiotage", *Bibliothèque Universelle et Revue Suisse*, 85^{e} année, 3^{e} période, 5, mars, 452-76, e 6, avril, 66-94; come ristampato in Walras (1898), pp. 401-421 and 422-445.
—— 1883. *Théorie mathématique de la richesse sociale*, Imprimerie Corbaz, Lausanne; Guillaumin, Paris; Ermanno Loescher, Rome; Duncker & Humblot, Leipzig.
—— 1885. "Un économiste inconnu: Hermann-Henri Gossen", *Journal des économistes*, 4^{e} série, 30, avril-mai, 68-90; come ristampato in Walras (1896), (1990), pp. 311-330.
—— 1891. "De l'échange de plusieurs marchandises entre elles", *Mémoires et Compte Rendu des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils,* 5^{e} série, 44, janvier, 42-49.
—— 1892. "Théorie géométrique de la détermination des prix. De l'échange des produits et services entre eux. De l'échange d'épargnes contre capitaux neufs", *Recueil Inaugural de l'Université de Lausanne. Travaux des Facultés*, Lausanne.
—— 1896. *Etudes d'économie sociale: Théorie de la répartition de la richesse sociale*, F. Rouge, Lausanne; F. Pichon, Paris. Come ristampato in Auguste et Léon Walras, *Œuvres économiques complètes, 9*, Economica, Paris, 1990.
—— 1898. *Etudes d'économie politique appliquée: Théorie de la production de la richesse sociale*, F. Rouge, Lausanne; F. Pichon, Paris.
—— 1954. *Elements of Pure Economics*, translated by William Jaffé from the 5th ed., Irwin, Homewood, Ill.
—— 1987. *Mélanges d'économie politique et sociale*, in Auguste et Léon Walras, *Œuvres économiques complètes, 7*, Economica, Paris.

—— 1988. *Eléments d'économie politique pure ou Théorie de la richesse sociale, édition comparée*, in Auguste et Léon Walras, *Œuvres économiques complètes, 8*, Economica, Paris.
—— 1993. *Théorie mathématique de la richesse sociale et autres écrits d'économie pure*, in Auguste et Léon Walras, *Œuvres économiques complètes, 11*, Economica, Paris.